Analiza matematyczna
Lista 5 (rozwijanie w szereg, ekstrema)

Zad 1. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną zupełną dla wszysktich funkcji z ostaniego zadania listy 4.

Zad 2. Napisać wzór na rozwinięcie funkcji $f(x, y)$ w szereg Taylora w punkcie (x_0, y_0) z n-tą resztą Lagrange'a, gdzie

a) $f(x, y) = (1 + x)^2(1 + y), \quad (x_0, y_0) = (-1, -1), \quad n = 4,$

b) $f(x, y) = 2x^3 + y + x^y, \quad (x_0, y_0) = (1, 0), \quad n = 2,$

c) $f(x, y) = e^x y, \quad (x_0, y_0) = (0, 1), \quad n = 3,$

d) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y), \quad (x_0, y_0) = (0, 0), \quad n = 4.$

Zad 3. Rozwinąc w szereg Maclaurina podane funkcje

a) $f(x, y) = (1+x)^2(1+y),$ b) $f(x, y) = \ln(1+x+y),$ c) $f(x, y) = e^x \sin y,$

d) $f(x, y) = e^x \cos y,$ e) $f(x, y) = \sin(x^2+y^2),$ f) $f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y).$

Zad 4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4,$ b) $f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x,$

c) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2,$ d) $f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$

e) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$ f) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$

g) $f(x, y) = \sin x \, \sin y \, \sin(x + y), \quad$ gdzie $\quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi,$

h) $f(x, y) = e^{x+2y}(x^2 - y^2),$ i) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2xy + y^2).$

Zad 5. Liczbę $a > 0$ podzielić na takie trzy części, aby ich iloczyn był najmniejszy.

Zad 6. Określić wymiary zbiornika prostopadłościennego o objętości 32 cm^3 tak, żeby jego pole powierzchni było minimalne.

Zad 7. Spośród trójkątów o obwodzie $2p$ znaleźć ten, którego pole jest największe.

Zad 8. Wyznaczyć punkty leżące na paraboli $2y - x^2 = 0$, których odległość od punktu $A(4, 1)$ jest ekstremalna.

Zad 9. Znaleźć najmniejszą i najwieksza wartośc funkcji f w obszarze D, gdzie

a) $f(x, y) = 2x^2 - x + y^2 - y,\ D = \{(x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\},$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, D jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, -3)$,

c) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\},$

d) $f(x, y) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2}, \quad D = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\},$

e) $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-x-2y-3z}, \quad D = \{(x, y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}.$

Zad 10. Znaleźć ekstrema warunkowe stosując metodę Lagrange'a

a) $f(x, y) = x + y$, pod warunkiem $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2},$

b) $f(x, y, z) = x - 2 + z$, pod warunkiem $x + y^2 - z^2 = 1,$

c) $f(x, y) = x + y$, pod warunkiem $e^{x+y} = xy + 1,$

d) $f(x, y, z) = xyz$, pod warunkami $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, pod warunkami $bx + my + nz = 0$ oraz $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$